פתרון תרגיל 3

1. א.

1. $f'(x)=\left(x^3+5x^2-3x+2\right)'=3x^2+10x-3\cdot 1$

2. $f'(x)=\left(2^x+x^3\right)'=2^x\ln 2+3x^2$

3. $f'(x)=\left(\ln x+x^5\right)'=\frac{1}{x}+5x^4$

4.
$$f'(x)=\left[2^x\left(x^2+1\right)\right]'=\left(2^x\right)'\left(x^2+1\right)+2^x\left(x^2+1\right)'=2^x\ln 2\left(x^2+1\right)+2x\cdot 2^x$$

5.
$$f'(x)=\left[\ln x-2^x x\right]'=(\ln x)'-\left[\left(2^x\right)'x+2^x(x)'\right]=\frac{1}{x}-\left[2^x\ln 2\cdot x+2^x\right]$$

6. $$f'(x)=\left[\left(x^2+1\right)\ln x\right]'=\left(x^2+1\right)'\ln x+\left(x^2+1\right)(\ln x)'=2x\ln x+\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}=2x\ln x+x+\frac{1}{x}$$

7. $$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{\ln x}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'\ln x-\left(x^2+1\right)(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{2x\ln x-\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{2x^2\ln x-x^2-1}{x(\ln x)^2}$$

8. $$f'(x)=\left[\left(x^2+5x\right)^{10}\right]'=10\left(x^2+5x\right)^9\left(x^2+5x\right)'=10\left(x^2+5x\right)^9(2x+5)$$

9. $$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+5x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5x}}\left(x^2+5x\right)'=\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$$

10. $$f'(x)=\left[\ln\left(x^2+5x\right)\right]'=\frac{1}{x^2+5x}\left(x^2+5x\right)'=\frac{2x+5}{x^2+5x}$$

11. $$f'(x)=\left(e^{5x-1}\right)'=e^{5x-1}(5x-1)'=5e^{5x-1}$$

12.
$$f'(x)=\left(x^2e^{x^2+1}\right)'=\left(x^2\right)'e^{x^2+1}+x^2\left(e^{x^2+1}\right)'=2xe^{x^2+1}\left(x^2+1\right)'=2xe^{x^2+1}+x^2e^{x^2+1}2x=2xe^{x^2+1}\left(1+x^2\right)$$

13.
$$f'(x)=\left[\sqrt[3]{\left(5x^2-6\right)^2}\right]'=\left[\left(5x^2-6\right)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}\left(5x^2-6\right)^{\frac{-1}{3}}\left(5x^2-6\right)'=\frac{2}{3\left(5x^2-6\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot 10x=\frac{20x}{3\sqrt[3]{5x^2-6}}$$

14. $$f'(x)=\left[(\ln x)^5\right]=5(\ln x)^4(\ln x)'=\frac{5(\ln x)^4}{x}$$

15. $$f'(x)=\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)'=(x)'e^{\frac{1}{x}}+x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

המשך - פתרון תר' 3 (ב)

.16

$$f'(x) = \left(x^2+1\right)^x = e^{\ln\left(x^2+1\right)^x} = e^{x\ln\left(x^2+1\right)} \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x\ln\left(x^2+1\right)}\left(x\ln\left(x^2+1\right)\right)' =$$

$$\left(x^2+1\right)^x\left[\ln\left(x^2+1\right) + x\frac{2x}{x^2+1}\right] = \left(x^2+1\right)^x\left[\ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$$

ב. $y = 2x^2 - 3x + 8 \Rightarrow \quad y' = 4x - 3$

אם שיפוע של המשיק הוא 1 אזי בנקודת השקה (x_0, y_0) מתקיים $y'(x_0) = 1$ כלומר:

$4x_0 - 3 = 1 \Rightarrow \quad x_0 = 1 \Rightarrow \quad y_0 = 2 - 3 + 8 = 7$ משוואת המשיק: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

תשובה: $(1,7)$ משוואת המשיק: $y = x + 6$ $= 7 + (4x-3)\big|_{x=1}(x-1) = 7 + 1(x-1) = x+6$

ג. $y = x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow \quad y' = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow \quad y'(2) = 3\cdot 4 - 6\cdot 2 + 1 = 1$

$y = x^4 - x^2 - x - 5 \Rightarrow \quad y' = 4x^3 - 2x - 1 \Rightarrow \quad y'(1) = 4 - 2 - 1 = 1$

כלומר שיפוע המשיקים שוים, ז"א משיקים מקבילים.

.2

2.1 $$\lim \frac{x^3 + 8x^2 - 5x - 84}{x^2 + x - 12} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 3} \frac{3x^2 + 16x - 5}{\underset{x\to 3}{2x+1}} = \frac{27 + 48 - 5}{7} = 10$$

2.2 $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{6x}{12x^2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

2.3 $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

2.4 $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

2.5 $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + e^x}{2x + 5e^x} \underset{L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{10x + e^x}{2 + 5e^x} \underset{\delta}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{10 + e^x}{5e^x} \underset{L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

2.6 $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(3 + e^x\right)}{3 + 5x} \underset{L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{3+e^x}}{5} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5\left(3 + e^x\right)} \underset{L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5e^x} = \frac{1}{5}$$

המשך פתרון תרגיל 3 (3)

2.7

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L}{=}}\lim_{X\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

2.8 לא קיים - $\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$

מכיוון ש:

$$\lim_{x\to 0-} xe^{\frac{1}{x}}\overset{0\cdot 0}{=}0$$

$$\lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}}\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

2.9

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x\overset{0(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{\delta}{=}}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

2.10

$$\lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}=e^0=1$$

מכיוון שלפי (9) $\lim_{x\to 0+} x\ln x=0$

ה.

$$TC(x)=5x^3+x+\sqrt{x}$$

$$MC(x)=[TC(x)]'=15x^2+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$MC(2)=61+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

המשמעות הכלכלית של $MC(2)$ היא:

אם מגדילים יצור מ-2 ל-3 ההוצאה $TC(2)$ גדלה בערך ב- $MC(2)$.