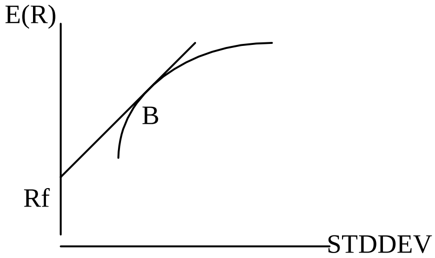
<u>טכניקות לבניית החזית היעילה</u>

פרופסור בני לאוטרבך

נניח שבידך נתונים על שונות, שונות משותפת ותוחלת תשואה של נכסים מסוכנים. עוד נניח שאין הגבלות על SHORT וששער הריבית זהה ללווים ומלווים. מהו התיק היעיל עבורך?



שימו לב שבשלב זה אני לא מחפש את כל החזית אלא רק את תיק ההשקה. זאת כיוון שאני אחזיק רק RF ו- B (החזית היעילה של כל הנכסים היא קו ישר). עוד שימו לב שאני מניח שלא אחזיק את תיק השוק, וזאת עקב מספר גורמים אפשריים:

א. הערכותי לגבי תוחלת ושונות תשואת הנכסים שונות מהערכות השוק.

ב. אני מגביל את עצמי למניות מסוימות ו/או כולל גם נכסים שאינם סחירים.

איך אזהה את תיק ההשקה B? ובכן זהו התיק שעבורו:

$$\theta = \frac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P}$$

הינו מכסימלי. ידוע ש:

$$\theta = \frac{\sum x_i \overline{R}_i - R_F}{\left(\sum \sum x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

כך שההבדל בין שני תיקים ייוצר בגלל הבדל בX-ים שלהם.

מהם הX-ים האופטימליים? כלומר, מהם המשקלות המביאות אותי לתיק B?

צריך לפתור את הבעיה הבאה:

$$\underset{x_i}{MAX} \ \frac{\sum x_i \overline{R}_i - R_F}{\sigma_p}$$

$$S.T$$

$$\sum x_i = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{x_i}{MAX} \ \frac{\sum x_i \overline{R}_i - R_F}{\left(\sum \sum x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

המגבלה :

$$\sum x_i = 1$$

היא מגבלה המבטיחה שכל כספך מושקע.

אם המגבלה הזאת מתקיימת אזי :

$$R_F \sum x_i = R_F$$

ניתן להציב את צד שמאל של הזהות בפונקצית המטרה במקום Rf, ולהפוך על ידי כך את בעיית המכסימום המוגבלת לבעיית מכסימום פשוטה. כעת נחפש פתרון ל:

$$\underset{x_i}{MAX}\ \theta = \frac{\sum x_i\left(\overline{R}_i - R_F\right)}{\left(\sum\sum x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} = \underbrace{\sum x_i\left(\overline{R}_i - R_F\right)}_{A} \underbrace{*}_{*} \underbrace{\left(\sum\sum x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{B}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial x_1}B + A\frac{\partial B}{\partial x_1} = \left(\overline{R}_1 - R_F\right)\frac{1}{\sigma_p} + \sum x_i\left(\overline{R}_i - R_F\right)\frac{\partial B}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\left(\sigma_p^2\right)^{-\frac{3}{2}} * \frac{\partial\sigma_P^2}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} * \frac{1}{\sigma_p^3}\left(2x_1\sigma_1^2 + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} \ldots\ldots + 2x_n\sigma_{1n}\right)$$

זאת כיוון ש:

$$\sum_i\sum_j x_i x_j \sigma_{ij} = x_1^2\sigma_1^2 + x_1x_2\sigma_{12} + x_1x_3\sigma_{13} + \ldots\ldots + x_1x_n\sigma_{1n}$$

$$x_2x_1\sigma_{12}$$

$$x_3x_1\sigma_{13}$$

$$\vdots$$

$$x_nx_1\sigma_{1n}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \left(\overline{R}_1 - R_F\right)\frac{1}{\sigma_P} + -\frac{1}{\cancel{2}\sigma_P^3} * \cancel{2}\sum_1^n x_i\sigma_{1i} * \sum_1^n x_i\left(\overline{R}_i - R_F\right)$$

את המכסימום מקבלים כשהביטוי הנ"ל שווה לאפס, כלומר :

$$\frac{\overline{R}_1 - R_F}{\sigma_P} = \frac{\sum x_i\left(\overline{R}_i - R_F\right) * \sum x_i\sigma_{1i}}{\sigma_p^3}$$

$$\Rightarrow \overline{R}_1 - R_F = \lambda\sum x_i\sigma_{1i}$$

כאשר:

אם נפתור משוואה דומה לנכס 2 נקבל:

$$\overline{R}_2 - R_F = \lambda \sum x_i \sigma_{2i}$$

$$\lambda = \frac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P^2}$$

לכן, הX-ים האופטימליים מקיימים מערכת משוואות כזאת:

$$\bar{R}_1 - R_F = \lambda \sum x_i \sigma_{1i}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\bar{R}_n - R_F = \lambda \sum x_i \sigma_{ni}$$

איך פותרים מערכת משוואות כזאת? בשלב הראשון מגדירים:

$$\lambda \mathrm{x}_\mathrm{i} = Z_i$$

ואז:

$$\bar{R}_1 - R_F = \sum_i Z_i \sigma_{1i} = Z_1 \sigma_1^2 + Z_2 \sigma_{12} + \cdots + Z_n \sigma_{1n}$$
$$\vdots$$
$$\bar{R}_n - R_F = \sum_i Z_i \sigma_{ni} = Z_1 \sigma_{n1} + Z_2 \sigma_{n2} + \cdots + Z_n \sigma_{nn}$$

זוהי מערכת של N משוואות עם N נעלמים (ה Z-ים).

פותרים עבור הZ-ים ואח"כ מגיעים ל X-ים. אם

$$Z_i = \lambda x_i$$

הרי:

$$\sum Z_i = \sum \lambda x_i = \lambda \sum x_i = \lambda$$
$$\Downarrow$$
$$x_i = \frac{Z_i}{\sum Z_i}$$

דוגמא

E(R3)=20	E(R2)=8	E(R1)=14
σ1=6	σ2=3	σ3=15
CORR(1,2)=0.5	CORR(1,3)=0.2	CORR(2,3)=0.4
COV(1,2)=9	COV(1,3)=18	COV(2,3)=18
Rf=5		

ומותר למכור בחסר. מהו התיק האופטימלי?

$$\bar{R}_1 - R_F = \sum Z_i \sigma_{1i}$$
$$\bar{R}_2 - R_F = \sum Z_i \sigma_{2i}$$
$$\bar{R}_3 - R_F = \sum Z_i \sigma_{3i}$$

$$\begin{cases} 14-5 = Z_1 * 6^2 + Z_2 * 9 + Z_3 * 18 \\ 8-5 = Z_1 * 9 + Z_2 * 3^2 + Z_3 * 18 \\ 20-5 = Z_1 * 18 + Z_2 * 18 + Z_3 * 15^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = 36Z_1 + 9Z_2 + 18Z_3 \\ 3 = 9Z_1 + 9Z_2 + 18Z_3 \\ 15 = 18Z_1 + 18Z_2 + 225Z_3 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{c|ccc} 9 & 36 & 9 & 18 \\ 3 & 9 & 9 & 18 \\ 15 & 18 & 18 & 225 \end{array}\right\}_{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}$$

$$\left\{\begin{array}{c|ccc} 9 & 36 & 9 & 18 \\ 3 & 9 & 9 & 18 \\ 9 & 0 & 0 & 189 \end{array}\right\}_{\mathrm{II}-\frac{1}{4}\mathrm{I}}$$

$$\left\{\begin{array}{c|ccc} 9 & 36 & 9 & 18 \\ \frac{3}{4} & 0 & 6\frac{3}{4} & 13\frac{1}{2} \\ 9 & 0 & 0 & 189 \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$9 = 189Z_3 \Rightarrow Z_3 = \frac{1}{21}$$
$$\frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}Z_2 + 13\frac{1}{2} * Z_3 \Rightarrow Z_2 = \frac{1}{63}$$
$$9 = 36Z_1 + 9 * Z_2 + 18 * Z_3 \Rightarrow Z_1 = \frac{2}{9}$$

$$\Downarrow$$

$$X_1^* = \frac{Z_1}{\sum Z} = \frac{14}{18}$$

$$X_2^* = \frac{1}{18}$$

$$X_3^* = \frac{3}{18}$$

$$\overline{R}_B = 14\frac{2}{3}$$

$$\sigma_B^2 = 33\frac{5}{6}$$

מקרים נוספים

1. אסור לעשות SHORT . עדיין הבעיה היא למצוא את תיק ההשקה :

$$\underset{x_i}{MAX} \frac{\sum x_i \overline{R}_i - R_F}{\sigma_p}$$

אבל עכשיו כפוף לתנאי נוסף. לא רק :

$$\sum x_i = 1$$

אלא גם

$$x_i \geq 0$$

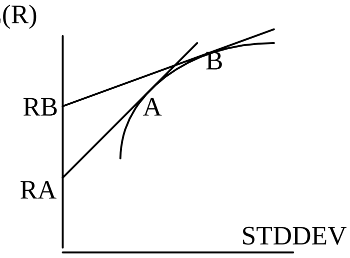
איך עושים זאת? באמצעות תוכנה שעושה תכנון ריבועי, זוהי בעיה של תכנון ריבועי וקיימות בשוק מספר תוכנות שעושות זאת.

2. אסור לעשות SHORT ואין RF . עכשיו צריך למצוא תיק יעיל . הבעיה כעת ניתנת להגדרה כ :

$$\underset{x_i}{MIN} \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$$
$$S.T$$
$$\sum x_i = 1$$
$$\sum x_i \overline{R}_i = \overline{R}_P$$
$$x_i \geq 0$$

התוכנות הקיימות בשוק פותרות זאת. שימו לב שצריך להציב משהו במקום ER_P. אחרי שמוצאים שני תיקים יעילים לא ניתן לשרטט את כל החזית היעילה על ידי יצירת קומבינציות שלהם, כיוון שרק אם מותר SHORT קומבינציה של תיקים יעילים אף היא יעילה. לכן צריך להמשיך הלאה, להציב ערכים שונים ל- ER_P , וכל פעם לפתור מחדש. מיגע!!!

3. אין RF, אבל יש אפשרות ל- SHORT . שוב צריך למצוא שני תיקים יעילים . נבחר שני שערי ריבית פיקטיביים (RA ו- RB), ונמצא את התיקים היעילים A ו- B הבאים :



את תיק B ניתן למצוא אם נפתור :

$$\underset{x_i}{MAX} = \frac{\sum x_i\left(\overline{R}_i - R_B\right)}{\left(\sum\sum x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ואת תיק A נמצא אם נפתור :

$$\underset{x_i}{MAX} = \frac{\sum x_i\left(\overline{R}_i - R_A\right)}{\left(\sum\sum x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

שימו לב : RA ו - RB לא קיימים, אבל זה לא משנה. תיק A הוא התיק האופטימלי אילו היה RA, ולכן ניתן למצוא את הרכב תיק A כאשר מניחים לרגע ש- RA קיים. כמובן שברגע שמסיימים לחשב את הרכב תיק A שוכחים מ- RA. החזית היעילה נפרשת ע"י תיקים של A ו - B.

טכניקה אלטרנטיבית

כאשר יש הרבה מניות , הטכניקה שסקרנו לחישוב החזית היעילה נעשית מסובכת. צריך להכניס את כל N השונויות , N(N-1)/2 שונויות משותפות, ו- N תוחלות התשואה. גם כתיבת המשוואות נעשית ארוכה יותר ופתרונן (אפילו למחשב) קשה יותר.
אם מאמצים את גישת מודל השוק , ניתן לפשט את התהליך ואת המשוואות שצריך לפתור.

$$\bar{R}_k - R_F = \sum_i Z_i \sigma_{ki}$$

$$\underbrace{\sigma_{ik} = \beta_i \beta_k \sigma_M^2}_{i \neq k}$$

$$\underbrace{\sigma_{kk} = \sigma_k^2 = \beta_k^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon k}^2}_{i=k}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{R}_k - R_F = \sum Z_i \beta_i \beta_k \sigma_M^2 + Z_k \sigma_{\varepsilon k}^2$$

$$\Downarrow$$

$$Z_k = \frac{\bar{R}_k - R_F}{\sigma_{\varepsilon k}^2} - \frac{\beta_k \sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon k}^2} \sum Z_i \beta_i$$

$$\Downarrow$$

$$Z_k = \frac{\beta_k}{\sigma_{\varepsilon k}^2} \left[\frac{\bar{R}_k - R_F}{\beta_k} - \sigma_M^2 \sum Z_i \beta_i \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Z_k = \frac{\beta_k}{\sigma_{\varepsilon k}^2} \left[\frac{\bar{R}_k - R_F}{\beta_k} - C^* \right]}_{C^* = \sigma_M^2 \sum Z_i \beta_i}$$

C* הוא מספר קבוע שאיננו תלוי בנכס עבורו מחשבים את ה-Z. בוא נראה כיצד לחשבו :

$$\sum Z_i \beta_i = \sum \frac{\bar{R}_i - R_F}{\sigma_{\varepsilon i}^2} \beta_i - \sigma_M^2 \sum \frac{\beta_i^2}{\sigma_{\varepsilon i}^2} \sum Z_i \beta_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum Z_i\beta_i = \frac{\sum \frac{\overline{R}_i - R_F}{\sigma_{\varepsilon i}^2}\beta_i}{1+\sigma_M^2\sum\frac{\beta_i^2}{\sigma_{\varepsilon i}^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$C^* = \sigma_M^2\,\frac{\sum \frac{\overline{R}_i - R_F}{\sigma_{\varepsilon i}^2}\beta_i}{1+\sigma_M^2\sum\frac{\beta_i^2}{\sigma_{\varepsilon i}^2}}$$

כמקודם :

$$x_i = \frac{Z_i}{\sum Z_i}$$

וכך ניתן למצוא את ה X-ים האופטימלים. שימו לב עוד שה Z-ים וה X-ים יכולים להיות חיוביים או שליליים.

מה עושים כאשר אסור לעשות SHORT ? עדיין פותרים את אותה הבעיה, אבל Xi>=0. הפתרון באופן עקרוני זהה :

$$Z_k = \frac{\beta_k}{\sigma_{\varepsilon k}^2}\left(\frac{\overline{R}_k - R_F}{\beta_k} - C^*\right)$$

אלא שיש לזכור ש :

$$C^* = \sigma_M^2\sum Z_i\beta_i$$

כולל רק את המניות שבאופן מעשי נכנסות לתיק. כלומר, כדי לחשב את Zk אני צריך לדעת אילו מניות יהיו בתיק, וזה קשה. איך מתגברים על זה? בודקים קודם אילו מניות בטוחות בתיק.
עושים חישוב של :

$$\frac{\overline{R}_k - R_F}{\beta_k}$$

על פי המשוואה של Z , הסימן של Z נקבע קרוב לודאי על פי היחס הנ"ל (כי הביטא ושונות השארית חיוביים בכמעט 100% מהמקרים). לכן, הנכס שעבורו היחס הנ"ל (=עודף תשואה לביטא) הכי גבוה יכנס לתיק במשקל חיובי. באופן מעשי, בשלב ראשון, ממיינים את הנכסים לפי היחס הנ"ל מהנמוך לגבוה. אחר כך מרכיבים תיק של שתי המניות שעבורן היחס הנ"ל הוא הגבוה ביותר. שימו לב שצריך לחשב את C* בהתאם לשני הנכסים שבתיק.

מכלילים את מניה 2 בתיק אם ה-Z שלה יוצא חיובי. אם ה-Z שלה שלילי, התיק האופטימלי הוא להשקיע 100% במניה 1.

ממשיכים בהרחבת התיק עד שמגיעים למניה שעבורה:

$$\frac{\overline{R}_i - R_F}{\beta_i} \langle C_i^*$$

בתיק i-1 מניות כל ה X-ים וה Z-ים היו חיוביים. אבל כששקלתי הכנסת מניה נוספת, המשקל האופטימלי שלה בתיק i מניות היה שלילי. כיוון שאיננו יכולים להשקיע במשקל שלילי (SHORT) נעצור בתיק i-1 מניות, שהוא התיק האופטימלי במקרה זה.

* מה עושים כשמותר SHORT, אבל אין Rf? כמו שעשינו מקודם: פותרים עבור שני "Rf" שרירותיים, מוצאים שני תיקים יעילים, ופורשים את החזית היעילה ע"י קומבינציות שלהם.

* מה עושים כשאסור SHORT ואין Rf ? מחשבים את ההשקה כאילו אסור SHORT אבל יש Rf, ומוצאים תיק יעיל. ממשיכים עבור Rf אחר, וכולה.